INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Juin 1977. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, $\mathfrak{P}$ désigne le plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathfrak{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La norme d'un vecteur $\vec{V}$ sera notée $\| \vec{V} \|$ et la distance de deux points M_1 et M_2 de $\mathfrak{P}$ sera donc notée $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \|$ ou $\| M_1 M_2 \|$.

I

α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$.

1° Soit h une fonction réelle de classe C^1 sur le compact $[\alpha, \beta]$, pourvue d'une dérivée seconde sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.

On suppose que h vérifie les relations

$$h(\alpha) = h(\beta) \quad \text{et} \quad h'(\alpha) = 0 .$$

Montrer qu'il existe un réel ξ appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que $h''(\xi) = 0$.

2° Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$, pourvue d'une dérivée seconde sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et vérifiant la condition

$$f(\beta) = f(\alpha) + f'(\alpha)(\beta - \alpha).$$

Montrer qu'il existe un réel ξ appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que $f''(\xi) = 0$.

3° On considère deux fonctions réelles f et g de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$, pourvues chacune d'une dérivée seconde sur $]\alpha, \beta[$. On définit sur $[\alpha, \beta[$ les fonctions f_1 et g_1 par les formules

$$f_1 = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \; ; \qquad g_1 = \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}} .$$

Montrer que si f et g vérifient les conditions :

$$f(\alpha) = g(\alpha) \; ; \; f'(\alpha) = g'(\alpha) \; ; \; f(\beta) = g(\beta) \; ;$$

il existe ξ appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que $f_1'(\xi) = g_1'(\xi)$.

Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas f et g dérivables en β?

4° On reprend les hypothèses et les notations de la question précédente et on considère dans $\mathfrak{P}$ l'arc géométrique Γ d'équation $y = f(x)$ dans le repère $\mathfrak{R}$.

Quelle relation y a-t-il entre $f_1'(x)$ et la courbure géométrique de Γ au point d'abscisse x appartenant à $]\alpha, \beta[$?

On désigne par C l'arc géométrique d'équation $y = g(x)$ dans le repère $\mathfrak{R}$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat établi dans 3°?

Interpréter également le résultat de la question 2°.

II

On considère deux nombres réels m et γ; $\gamma > 0$. On désigne par D la droite de $\mathfrak{P}$ ayant pour équation $y = mx$ dans le repère $\mathfrak{R}$. Pour tout λ réel, on note $M(\lambda)$ le point de coordonnées (γ, λ) dans $\mathfrak{R}$.

1° Montrer que pour tout λ distinct d'une valeur particulière λ_0 que l'on précisera, il existe un cercle et un seul tangent en O à la droite D et passant par $M(\lambda)$. On note $C(\lambda)$ ce cercle et $r(\lambda)$ son rayon. Calculer $r(\lambda)$ en fonction de λ.

. . . / . . .

2° Étudier les variations de $r(\lambda)$ en fonction de λ. Montrer en particulier que $r(\lambda)$ présente un minimum relatif pour deux valeurs λ_1 et λ_2 de λ qui vérifient la condition

$$\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$$

3° Comment faut-il choisir λ pour qu'un arc du cercle C (λ) d'extrémités O et M (λ) puisse être représenté dans $\mathcal{R}$ par une équation de la forme $y = g(x)$; où g est une fonction continue sur $[0, \gamma]$, de classe C^2 sur $[0, \gamma[$?

4° Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $[0, \gamma]$ telle que

$$f(0) = 0 \ ; \ f'(0) = m \ ; \ f(\gamma) = \lambda.$$

On désigne par Γ l'arc géométrique d'équation $y = f(x)$ dans $\mathcal{R}$; et par $\rho(x)$ la courbure géométrique de Γ au point d'abscisse x appartenant à $[0, \gamma]$.

Montrer que si les conditions

$$\lambda \neq \lambda_0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$$

sont satisfaites, il existe ξ appartenant à $]0, \gamma[$ tel que

$$\rho(\xi) = \frac{1}{r(\lambda)} \cdot$$

Quelle conclusion a-t-on lorsque $\lambda = \lambda_0$?

5° Les hypothèses et les notations sont les mêmes que dans 4°; mais on suppose $\lambda > \lambda_2$.

Montrer que la droite joignant O et M (λ_2) rencontre Γ en au moins un point d'abscisse c telle que

$$0 < c < \gamma \ .$$

En déduire qu'il existe ξ appartenant à $]0, \gamma[$ tel que

$$\rho(\xi) > \frac{1}{r(\lambda)} \cdot$$

A-t-on le même résultat si $\lambda < \lambda_1$?

6° Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$. On désigne par Γ l'arc géométrique d'équation $y = f(x)$ dans $\mathcal{R}$, et par $\rho(x)$ la courbure géométrique de Γ au point d'abscisse x.

XIIOX

On considère deux réels x_1 et x_2 tels que

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \ ,$$

et on note M_1 et M_2 les points de Γ ayant pour abscisses respectives x_1 et x_2.

a. Si $f'(x_1) \neq f'(x_2)$,
on désigne par J le point d'intersection des normales à Γ en M_1 et M_2 et on pose $d = \sup (\| M_1 J \|, \| M_2 J \|)$.

Montrer qu'il existe ξ appartenant à $]x_1, x_2[$ tel que

$$\rho(\xi) \geqslant \frac{1}{d} \cdot$$

b. Si la droite M_1M_2 est normale à Γ en M_1 et M_2, montrer qu'il existe ξ appartenant à $]x_1, x_2[$ tel que

$$\rho(\xi) \geqslant \frac{2}{\| M_1 M_2 \|} \cdot$$

III

Soient a, b, η des réels tels que $a < b$ et $\eta > 0$.

On désigne par I l'intervalle $[a, b]$ et par $\Delta(\eta)$ l'ensemble des couples (t, u) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$t \in I \quad \text{et} \quad |u| \leqslant \eta \ .$$

On considère une application F de I dans $\mathcal{P}$, de classe C^2, injective et telle que pour tout t appartenant à I, $\vec{F}'(t) \neq 0$.

Le couple (I, F) est donc une paramétrisation d'un arc géométrique Γ sans point double ni point stationnaire.

On note φ et ψ les coordonnées de F dans le repère $\mathcal{R}$.

On a donc pour tout $t \in I$

$$\overrightarrow{OF}(t) = \varphi(t)\ \vec{i} + \psi(t)\vec{j} \ .$$

.../...

Pour tout t appartenant à I, on pose

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\|\vec{F}'(t)\|}\vec{F}'(t)$$

et on désigne par $\vec{\tau}_1(t)$ le vecteur déduit de $\vec{\tau}(t)$ par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

On note $\rho(t)$ la courbure géométrique de Γ au point $F(t)$ et on pose

$$\mu = \sup_{t \in I} \rho(t).$$

On note l la longueur de l'arc Γ.

Enfin, pour $t \in I$ et $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(t, u) = F(t) + u\vec{\tau}_1(t),$$

ce qui définit une application G de $I \times \mathbb{R}$ dans $\mathfrak{P}$.

1° Déterminer les arcs Γ pour lesquels G est injective sur $I \times \mathbb{R}$. Montrer que lorsque G n'est pas injective, μ est strictement positif. On supposera dans les questions suivantes que cette dernière condition est satisfaite.

2° Montrer que pour $\eta > \frac{1}{\mu}$, la restriction de G à $\Delta(\eta)$ n'est pas injective.

3° Calculer le Jacobien $J(t, u)$ de G au point (t, u) en fonction des dérivées de φ et ψ. Montrer que si η est choisi de façon que la restriction de G à $\Delta(\eta)$ soit injective, $J(t, u)$ est positif sur $\Delta(\eta)$.

4° Calculer

$$K(\eta) = \iint_{\Delta(\eta)} J(t, u)\, dt\, du.$$

Exprimer $K(\eta)$ en fonction de l.

Quelle signification peut-on donner à $K(\eta)$ lorsque G est injective sur $\Delta(\eta)$?

5° On suppose que pour tout t appartenant à I, $\varphi(t) = t$. Montrer que pour $\eta < \frac{1}{\mu}$, la restriction de G à $\Delta(\eta)$ est injective.

6° On conserve l'hypothèse $\varphi(t) = t$ sur I; et on pose

$$A = \inf_{t \in I} \psi(t) \; ; \qquad B = \sup_{t \in I} \psi(t).$$

Montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\mu l \leqslant \left[1 + \frac{1}{2}\mu(b-a)\right]\left[1 + \frac{1}{2}\mu(B-A)\right].$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail